

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c)

Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

• Minden feladat (I, II, III) kötelező. 10 pont jár hivatalból.

• Munkaidő 3 óra.

• Minden feladat részletes megoldását írd a vizsgalapra!

I. FELADAT

(30 pont)

- 5p 1. Számítsd ki: $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.
- 5p 2. Igazold, hogy az $f: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$ függvény páratlan!
- 5p 3. Határozd meg az $x^2 + 2x - 8 < 0$ egyenlőtlenség egész megoldásait!
- 5p 4. Az $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaz hány eleme osztható 4-gyel vagy 5-tel?
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $M(1, -2)$, $N(-3, -1)$ és $P(-1, 2)$ pontok! Határozd meg a Q pont koordinátáit, ha $MNPQ$ paralelogramma!
- 5p 6. Az ABC háromszögben $AB = 6$, $AC = 3$ és $BC = 5$. Számítsd ki az $[AD]$ magasság hosszát!

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adott a $\begin{cases} x - 2y - 8z = -65 \\ 3x + y - 3z = 22 \\ x + y + z = 28 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol $x, y, z \in \mathbb{R}$ és $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a rendszer mátrixa.
- 5p a) Igazold, hogy az A mátrix rangja 2.
- 5p b) Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletrendszert!
- 5p c) Határozd meg az egyenletrendszer azon megoldásainak számát, amelyek az $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazban vannak!
2. Adott az $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ mátrixhalmaz.
- 5p a) Határozd meg az A halmaz elemeinek számát!
- 5p b) Igazold, hogy létezik olyan nullától különböző $M \in A$ mátrix, amelyre $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.
- 5p c) Oldd meg az A halmazon az $X^2 = I_2$ mátrixegyenletet!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arctg \frac{x}{x+1}$ függvény.
- 5p a) Határozd meg az f függvény grafikus képe $+\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!
- 5p b) Tanulmányozd az f függvény monotonitását!
- 5p c) Határozd meg az f függvény inflexiós pontjait!
2. Adott az $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x} dx$ sorozat.
- 5p a) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő!
- 5p b) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat korlátos!
- 5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2 - I_n)$ határértéket!